INA - ENSA 86

MATHÉMATIQUES

(Option agronomie — Option biochimie-biologie)

PREMIÈRE COMPOSITION

DURÉE : 3 heures

PROBLÈME 1 (ALGÈBRE LINÉAIRE)

On note $\mathbb{C}[X]$ l'anneau des polynômes en la variable X, à coefficients complexes et pour tout entier naturel n, on considère le $\mathbb{C}$ – espace vectoriel E_n, formé du polynôme 0 et des polynômes P de degré $\leqslant n$.

Pour $P \in E_n$, on désigne par Q le quotient de la division euclidienne de P par X et par T le reste de la division euclidienne de P par X^n.

1.1. Montrer que l'application $\varphi_n : P \to Q + XT$ est une application linéaire de E_n dans E_n.

1.2. On suppose $n = 2$.

a. Écrire la matrice A de φ_2 par rapport à la base $(1, X, X^2)$ de E_2.
Est-elle inversible ?

Trouver une base de l'image $\mathrm{Im}\,\varphi_2$ et du noyau $\mathrm{Ker}\,\varphi_2$ de φ_2.
A-t-on $E_2 = \mathrm{Im}\,\varphi_2 \oplus \mathrm{Ker}\,\varphi_2$?

b. Calculer A^2, A^3. En déduire pour tout entier naturel non nul p une expression de A^p.

1.3. On suppose $n = 3$. Démontrer que la matrice B de φ_3 par rapport à la base $(1, X, X^2, X^3)$ de E_3 est inversible et calculer B^{-1}.

PROBLÈME 2 (PROBABILITÉS)

Un marchand de journaux reçoit chaque jour la visite d'un nombre aléatoire de clients représentés pour un jour fixé par une variable aléatoire (v.a.) X à valeurs dans $\{0, 1, 2 \ldots\}$; nous supposons la loi de probabilité de cette v.a. connue (grâce, par exemple, à une statistique portant sur les ventes des jours précédents). Le marchand sait que s'il commande n journaux à l'éditeur :

— chaque journal vendu lui rapporte un bénéfice a,

chaque journal invendu lui vaut une perte b,

— chaque client insatisfait (qui ne pourrait se procurer le journal, faute d'un stock suffisant) lui coûte une somme c, dont le montant est choisi pour représenter en termes monétaires le risque de perdre ce client à jamais. Les données sont donc la loi de X et les 3 réels positifs a, b, c.

On appelle G_n le gain aléatoire du marchand de journaux qui a commandé n journaux pour un jour fixé. Le marchand se propose de déterminer la valeur de n pour laquelle $E(G_n)$ est maximale.

2.1. On suppose $a = 1$ $b = 0{,}2$ $c = 0$. La loi de X est donnée par :

$$p_0 = P(X = 0) = \frac{1}{8} \qquad p_1 = P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

$$p_2 = P(X = 2) = \frac{1}{4} \qquad p_3 = P(X = 3) = \frac{1}{8}$$

a. Calculer les lois des v.a. G_0, G_1, G_2, G_3.

En déduire $E(G_0)$, $E(G_1)$, $E(G_2)$, $E(G_3)$.

b. Montrer que pour tout $n > 3$ $E(G_n) < E(G_3)$. Conclure.

2.2. a, b, c sont quelconques, strictement positifs. X est désormais une v.a. quelconque à valeurs dans $\{0, 1, 2, \ldots\}$.

On note pour tout entier naturel n, $\Delta_n = E(G_{n+1}) - E(G_n)$.

a. Montrer que $\Delta_n = -b + (a + b + c)\,P(X \geqslant n + 1)$.

b. Quelle condition nécessaire et suffisante doit vérifier $P(X = 0)$ pour que $\Delta_0 > 0$?

c. On suppose que $P(X = 0) < \dfrac{a + c}{a + b + c}$.

Démontrer que la suite $(E(G_n))_{n \in \mathbb{N}}$ passe par un maximum.